



طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها (۳۵۴-۴۰)

Design and Analysis of Algorithms

مدرس: محمد قدسی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

نمونه سوال‌های امتحانی

(۱) گیریم $X[1 \dots n]$ و $Y[1 \dots n]$ دو مجموعه از اعداد دوه‌دو متمایز و هر کدام به صورت غیرنزولی مرتب باشند. الگوریتمی از $O(\lg n)$ برای یافتن میانه‌ی تمامی این $2n$ عدد ارائه دهید. یادآوری: میانه‌ی n عدد، $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ -امین بزرگترین عدد در میان آنهاست.

(۲) $A = \{a_0, \dots, a_n\}$ و $B = \{b_0, \dots, b_m\}$ از اعداد حقیقی هستند. می‌خواهیم کمانولوشن این دو یعنی $C = \{c_0, \dots, c_{2n}\} = A \otimes B$ را که

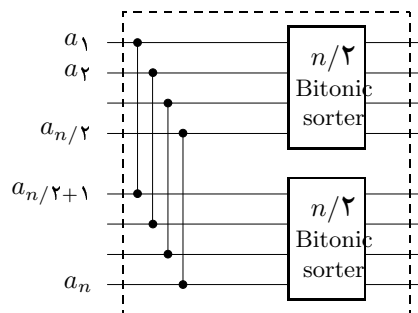
$$c_k = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i b_j$$

به دست آوریم. الگوریتمی از $O(n^{\lg 2})$ برای این کار پیش‌نهاد کنید و الگوریتم خود را تحلیل نمایید.

(۳) دنباله‌ی $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ از اعداد را «زیگزاگی» می‌گوییم اگر با نوشتن مرتب این اعداد دور یک دایره، یک اندیس t وجود دارد که اگر از a_t در جهت ساعت‌گرد دور دایره حرکت کنیم اعدادی که به ترتیب می‌بینیم به دو دنباله‌ی اکیداً صعودی و اکیداً نزولی تقسیم می‌شود. مثلاً دنباله‌های $\langle 2, -3, 1, 3, 8, 10, 4 \rangle$ و $\langle -6, -10, -7, 2, -3, -5, 1, 3, 8, 10, 2, -3 \rangle$ زیگزاگی هستند ولی $\langle 2, -3, 1, 3, 8, 10, 1 \rangle$ نیست.

(الف) یک الگوریتم از مرتبه‌ی $\Theta(\lg n)$ برای به دست آوردن بزرگ‌تری عنصر یک دنباله‌ی زیگزاگی با n عنصر ارائه دهید؟

(ب) اثبات کنید که شبکه‌ی مرتب‌ساز زیر یک دنباله‌ی زیگزاگی را مرتب می‌کند (فرض کنید $n = 2^k$).



(۴) ما نشان دادیم که هزینه‌ی سرشکن‌شده‌ی هر عمل «افزایش» در یک شمارنده‌ی دودویی $O(1)$ است. در این مسئله یک شمارنده‌ی دودویی متفاوت m بیتی $b_m b_{m-1} \dots b_1$ را در نظر بگیرید که در آن تغییر بیت i (b_i) هزینه‌ای برابر i دارد. یعنی اگر شمارنده از عدد 10111 به 11000 افزایش یابد، هزینه‌ای برابر $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ خواهد داشت. نشان دهید که هزینه‌ی عمل افزایش در این شمارنده‌ی دودویی نیز $O(1)$ است. برای این کار تابع $\Phi(b) = \sum_{i=1}^m (i+2)b_i$ را به عنوان پتانسیل پیشنهاد می‌کنیم که در آن $b = b_m b_{m-1} \dots b_1$ بقیه‌ی کار با شما!