

مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) ۱۰۰ کار قرار است توسط ۱۰ نفر اجرا شوند. زمان اجرای هر کار از قبل مشخص است. می‌خواهیم کارهایی که هر مجری باید انجام دهد را مشخص کنیم. فرض کنید افراد مجری دقیقاً مثل هم عمل می‌کنند. مثلاً اگر در زمان صفر دو کار به ترتیب با زمان‌های ۱۰ دقیقه و ۲۰ دقیقه را به یک مجری دهیم، او کار اول را دقیقاً در زمان ۱۰ دقیقه و دومی را در زمان ۳۰ دقیقه تمام می‌کند. الگوریتم زیر را برای تخصیص کارها به مجریان در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در ابتدا (زمان صفر) همه‌ی مجریان بی‌کار و آماده‌ی اجرای کارهای تخصیص داده شده‌اند.

(۱) همه‌ی کارها را به ترتیب زمان‌های اجرایشان به صورت صعودی مرتب کن و به همین ترتیب مورد بررسی قرار بده،
 (۲) کار مورد بررسی را به مجری‌ای بده که کارهایی که قرار است انجام دهد زودتر از بقیه تمام می‌شود.

فرض کنید که مجموع زمان‌های اجرای همه‌ی کارها ۱۰,۰۰۰ دقیقه و زمان اجرای طولانی‌ترین کار ۲۰۰ دقیقه است. بیش‌ترین زمانی که همه‌ی کارها تمام می‌شود حداکثر چند دقیقه است؟

- الف) ۱,۱۸۰ (ب) ۱,۵۰۰ (ج) ۹۸۰ (د) ۲,۰۰۰ (ه) ۱,۰۰۰

(۲) دو شیشه‌ی موازی با هم داده شده‌اند. از سمت چپ به این دو ۱۰۰ واحد نور می‌تابانیم. می‌دانیم هر یک از این شیشه‌ها اگر ۱۰۰ واحد نور دریافت کند، ۲۰ واحد آن را در جهت عکس تابش بر می‌گرداند، ۱۰ واحد را جذب می‌کند و ۷۰ واحد دیگر را در همان جهت تابش از خود عبور می‌دهد. چند واحد نور به سمت راست شیشه‌ها منتقل می‌شود؟

- الف) ۴۹ (ب) $49 + \frac{49}{3}$ (ج) $49 + \frac{4 \times 49}{100}$ (د) ۷۰ (ه) $49 + \frac{4 \times 49}{44}$

(۳) به چند طریق عدد ۸ را می‌توان به صورت $a + 2 \times b + 4 \times c + 8 \times d$ نوشت که در آن a, b, c, d دارای مقادیر صفر، ۱ یا ۲ هستند؟

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۸

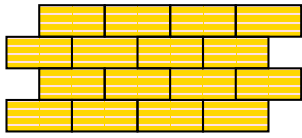
(۴) مهره‌ای بر روی نقطه‌ی مبدأ صفحه‌ی مختصات قرار دارد. در هر حرکت می‌توانیم مهره را از نقطه‌ی (x, y) به نقطه‌ی $(x + 1, y + 1)$ یا به نقطه‌ی $(x, y - 1)$ ببریم. به چند طریق می‌توانیم این مهره را به نقطه‌ی $(4, 0)$ برسانیم؟

- الف) ۳۵ (ب) ۱۶ (ج) ۲۵۶ (د) ۷۰ (ه) به نامتناهی روش

(۵) ۵ گونی شکر به وزن‌های ۲، ۳، ۴، ۴ و ۶ و یک گونی خالی داده شده‌اند. می‌خواهیم همه‌ی شکرها را در یک گونی بریزیم. هر بار می‌توانیم یک عمل «ادغام» انجام دهیم. هر ادغام یعنی انتخاب دو عدد از گونی‌های شکر، مثلاً با وزن‌های a و b ، و یک گونی خالی، و ریختن کامل شکرهای دو گونی در گونی خالی. فرض کنید که هزینه‌ی انجام این ادغام برابر $a + b$ باشد. کم‌ترین هزینه‌ی کل انجام این کار چه قدر است؟

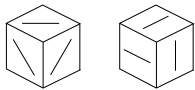
- الف) ۱۹ (ب) ۴۳ (ج) ۴۶ (د) ۵۱ (ه) ۶۰

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور



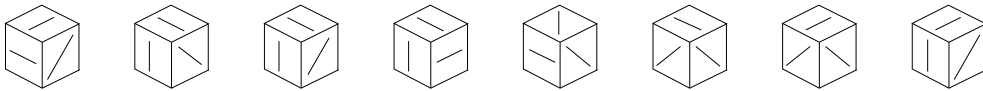
۶) به چند طریق می توان آجرهای شکل مقابل را با ۳ رنگ رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو آجر مجاوری هم رنگ نباشند.

- الف) 3^4 ب) 3×2^{15} ج) ۳ د) $3^4 \times 2^{12}$ ه) ۶



۷) بر روی هر یک از وجه های یک مکعب پاره خطی رسم کرده ایم، به طوری که هیچ دو پاره خطی در فضا موازی نیستند. این مکعب از دو گوشه (با مقداری دوران) به شکل های روبرو دیده می شود:

چند تا از شکل های زیر ممکن است، با مقداری دوران این مکعب، از گوشه ای از آن دیده شوند؟



- الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۸) آرش و آرمین با هم این بازی را انجام می دهند: آرش یک عدد x بین ۱ و ۱۳۸۴ انتخاب می کند و آرمین سعی می کند این عدد را حدس بزند. در هر مرحله آرمین یک عدد می گوید و آرش رابطه ای این عدد را نسبت به x (بزرگ تر، کوچک تر یا مساوی) را مشخص می کند. اگر عدد آرمین از $2x$ کوچک تر و بزرگ تر یا مساوی x باشد، آرمین برنده است. می خواهیم بدانیم کم ترین تعداد مرحله ی بازی که آرمین مطمئن است x هر چه که باشد، در این تعداد مرحله او بازی را خواهد برد، چند تا است؟

- الف) ۶۹۲ ب) ۱۰ ج) ۹ د) ۴ ه) ۳

۹) دنباله ای از اعداد ۱ تا ۱۳۸۳ را از چپ به راست نوشته ایم:

$$1, 2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12, \dots, 1382, 1383$$

از سمت چپ شروع می کنیم و به تعداد رقم یکمان عدد فعلی جملو می رویم. بنابراین اعدادی که به آنها بر می خوریم، عبارتند از $1, 2, 4, 8, \dots$ تعداد این اعداد چند تا است؟

- الف) ۲۳۱ ب) ۳۴۶ ج) ۳۴۵ د) ۲۷۷ ه) ۲۷۸

۱۰) دو نفر این بازی را انجام می دهند: هر نفر در نوبت خود، یک رقم از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بر روی کاغذ می نویسد و بازی پس از نوشتن رقم n ام خاتمه می یابد. نفر دوم قصد دارد کاری کند که در انتها مجموع ارقام نوشته شده بر ۹ بخش پذیر باشد. ولی نفر اول می خواهد از این کار جلوگیری کند. به ازای چه مقدار n نفر دوم می تواند حتماً به هدف خود برسد؟

- الف) ۱۳۸۲ ب) ۱۳۸۳ ج) ۱۳۸۴ د) ۱۳۸۶ ه) ۱۳۸۸

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۱) یک عدد ۱۳۸۳ رقمی با رقم سمت چپ ۶ است. اگر هر دو رقم متوالی N را به عنوان یک عدد دو رقمی در نظر بگیریم، این عدد یا مضرب ۱۷ است یا مضرب ۲۳. کدام گزینه زیر می تواند رقم سمت راست N باشد؟

- الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

(۱۲) در بازی «سیب زمینی داغ»، ۵ بازی گر هستند با یک سیب زمینی داغ. زیر پای هر بازی گر یک شماره است. هر بازی گر مجبور است سیب زمینی داغ را یک ثانیه نگه دارد و سپس آن را به بازی گری که شماره اش زیر پای اوست بدهد. در این بازی شما با شماره ی ۱ شرکت کرده اید و در ابتدا سیب زمینی نزد شماست. برای چندتا از حالت های زیر ممکن است شماره ی زیر پای شما طوری باشد که دیگر سیب زمینی به دست شما برنگردد؟

- ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای ۳، ۱ زیر پای ۴ و ۱ زیر پای ۵
- ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای ۳، ۱ زیر پای ۴ و ۴ زیر پای ۵
- ۳ زیر پای ۲، ۱ زیر پای ۳، ۵ زیر پای ۴ و ۴ زیر پای ۵
- ۱ زیر پای ۲، ۲ زیر پای ۳، ۲ زیر پای ۴ و ۳ زیر پای ۵

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

(۱۳) به چند طریق می توان خانه های یک جدول ۱۰×۳ (۱۰ سطر و ۳ ستون) را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرد، به طوری که:

- رنگ خانه ها نسبت به ستون وسط متقارن باشد.
- از هر دو سطر متوالی حداقل یک خانه سیاه شده باشد.
- هیچ دو خانه ی سیاه مجاور هم نباشند. دو خانه مجاورند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.

- الف) ۱,۰۲۴ ب) ۲,۰۴۸ ج) ۳,۰۷۳ د) ۱,۵۳۶ ه) ۷۶۸

(۱۴) عدد ۸۴ رقمی دودویی $x = x_{۸۲}x_{۸۱} \dots x_1x_0$ مفروض است. از عدد ۴۲ رقمی مبنای ۴ خاص $y = y_{۴۱}y_{۴۰} \dots y_1y_0$ را به شرح زیر می سازیم.

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 - 2x_1 \\ y_i &= x_{2i-1} + x_{2i} - 2x_{2i+1} \\ y_{۴۱} &= x_{۸۱} + x_{۸۲} \end{cases}$$

به طوری که هر y_i می تواند یکی از رقم های مجموعه ی $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را اختیار کند. چه رابطه ای بین $y = \sum_{i=0}^{۴۱} y_i 4^i$ و $x = \sum_{i=0}^{۸۲} x_i 2^i$ برقرار است؟

- الف) $y = 2x$ ب) $x = 2y$ ج) $x = y$ د) $y = 4x$ ه) $y = -x$

(۱۵) دنباله ی $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ جای گشتی از اعداد ۱ تا n است به طوری که برای $1 \leq i \leq n-1$ یا $a_i = a_{i+1} + 5$ یا $a_i = a_{i+1} - 8$ بزرگ ترین مقدار n چند است؟

- الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۶) جای گشت n عضو $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ از اعداد ۱ تا n را در نظر بگیرید. برنامه‌ی زیر این دنباله را مرتب می‌کند:

دستورهای زیر را برای هر یک از مقادیر i از ۱ تا n تکرار کن:
 \leq تا وقتی که a_i برابر i نیست، مقدار خانه‌ی i را با مقدار خانه‌ی a_i تعویض کن.

مثلاً اگر ورودی $(5, 2, 3, 1, 4)$ باشد،

$$\langle 5, 2, 3, 1, 4 \rangle \xrightarrow{\text{تعویض ۴ و ۵}} \langle 4, 3, 2, 1, 5 \rangle \xrightarrow{\text{تعویض ۱ و ۴}} \langle 1, 3, 2, 4, 5 \rangle \xrightarrow{\text{تعویض ۲ و ۳}} \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$$

حداکثر تعداد تعویض‌ها برای تمام جای‌گشت‌های 2005 عضو را در نظر بگیرید. باقی‌مانده‌ی این عدد بر ۵ چند است؟

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۷) ۸ خانواده به یک مهمانی دعوت شده‌اند. تعداد اعضای خانواده‌ها به ترتیب برابر ۴، ۴، ۴، ۴، ۵، ۵ و ۵ نفرند. میزبان برای شام تعدادی میز در نظر گرفته است که هرکدام دقیقاً ۷ جای صندلی دارد. میزبان می‌خواهد جای نشستن هر فرد را از قبل تعیین کند به طوری که هیچ دو نفر از اعضای یک خانواده دور یک میز نشینند. حداقل تعداد میزهای مورد نیاز چند تا است؟

- الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۱۸) عدد N داده شده است. N را می‌توانیم هر بار در یک عدد صحیح دل‌خواه ضرب کنیم و سپس کلیه‌ی صفرهای عدد حاصل را از بین ببریم. هدف این است که با تکرار این کار در نهایت عدد حاصل تک رقمی شود. مثلاً ۲۱ را

$$21 \xrightarrow{\times 5} 105 \xrightarrow{\times 4} 15 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 6$$

می‌توان با دو بار به ۶ تبدیل کرد: ۱۱ را با حداقل چند بار تکرار این عمل می‌توان به یک عدد یک رقمی تبدیل کرد؟

- الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۱۹) یک لامپ سالم در زیرزمین فقط به یکی از ۱۰ کلید مشابه در حال طبقه‌ی بالا وصل است. ۹ کلید دیگر به هیچ لامپی وصل نیستند. کلید متصل به لامپ، اگر در وضعیت روبه‌بالا قرار گیرد لامپ را روشن و اگر روبه‌پایین باشد آن را خاموش می‌کند. می‌خواهیم با حداقل تعداد پایین رفتن به زیرزمین، مشخص کنیم کدام یک از کلیدها به لامپ زیرزمین وصل است. می‌دانیم که لامپ با ۵ بار خاموش و روشن کردن متوالی حتماً می‌سوزد، و لامپ سوخته از سالم قابل تشخیص است. توجه کنید که فقط همان یک لامپ را در اختیار داریم و سوختن آن هم برای ما مهم نیست. با حداقل چند بار پایین رفتن می‌توان جواب مسئله را پیدا کرد؟ (توجه کنید که بالا رفتن‌ها را نمی‌شماریم.)

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۰) یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ را به چند طریق می‌توان با مکعب مستطیل $1 \times 1 \times 3$ به‌طور کامل پر کرد؟

- الف) ۱ ب) ۸ ج) ۲۴ د) ۲۷ ه) ۲۱

مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۱) یک عدد صد رقمی دهدهی با ارقام ۱ تا ۹ مفروض است. آنرا از چپ به راست به ترتیب زیر می‌خوانیم و عدد جدیدی می‌سازیم: اولین رقم سمت چپ را می‌خوانیم و به همان تعداد جلو می‌رویم، رقمی که به آن می‌رسیم را در عدد جدید قرار می‌دهیم و در عدد فعلی یک رقم جلو می‌رویم. این کار را تکرار می‌کنیم تا به انتهای عدد فعلی برسیم. سپس همین کار را با عدد جدید انجام می‌دهیم و عدد جدیدتری می‌سازیم تا وقتی نتوان عدد جدیدتری ساخت. مثال:

عدد ساخته‌شده‌ی دوم $7 \dots$ $\xrightarrow{\text{عدد ساخته‌شده‌ی اول}}$ $267 \dots$ $\xrightarrow{\text{عدد اصلی}}$ $12345678924567 \dots$

اگر عدد اولیه‌ی صد رقمی به گونه‌ای باشد که آخرین عدد ساخته‌شده ۹ رقمی شود، تعداد عددهای ساخته‌شده حداقل و حداکثر چند تا است؟

- (الف) حداقل ۱ و حداکثر ۴ (ب) حداقل ۳ و حداکثر ۳ (ج) حداقل ۲ و حداکثر ۲
(د) حداقل ۱ و حداکثر ۲ (ه) حداقل ۲ و حداکثر ۳

(۲۲) عدد N را «متوازن» می‌گوییم اگر مجموع تعداد ارقام ۱ در همه‌ی اعداد ۱ تا N برابر N باشد. مثلاً ۱ متوازن است. ۱۱ متوازن نیست چون مجموع تعداد ارقام ۱ آن (فقط در عددهای ۱، ۱۰ و ۱۱) برابر ۴ است. می‌دانیم که اولین عدد متوازن بزرگ‌تر از ۱ عدد ۱۹۹,۹۸۱ است. تعداد عددهای متوازن بین (و شامل) ۱۹۹,۹۸۱ تا ۲۰۰,۰۰۰ چند تا است؟

- (الف) ۱ (ب) ۱۱ (ج) ۱۲ (د) ۱۹ (ه) ۲۰

(۲۳) یک مربع 100×100 را به صورت شطرنجی رنگ کرده‌ایم. شخصی در گوشه‌ی بالا و سمت چپ این مربع که خانه‌ای سفید است ایستاده است. این شخص می‌خواهد با حرکت در این مربع پذیر کدام از خانه‌ها حداقل یکبار ایستاده باشد. هزینه‌ی رفت و آمد برای حرکت او به این صورت است:

- از هر خانه به هر کدام خانه‌های مجاور (حداکثر ۴ خانه)، ۱ تومان.
- از هر خانه‌ی سیاه به هر خانه‌ی سیاه دیگر، رایگان است.

حرکت به غیر از دو صورت گفته‌شده در بالا ممکن نیست. حداقل هزینه‌ای که این شخص باید بپردازد چه قدر است؟

- (الف) ۹,۹۹۹ (ب) ۵,۰۰۰ (ج) ۴,۹۹۹ (د) ۵,۰۰۱ (ه) ۹,۹۹۸

(۲۴) اعداد ۰ تا ۱۲۷ را به ترتیب پشت سر هم نوشته‌ایم. حالا بین هر دو عدد XOR (یا \oplus) آن دو را می‌نویسیم. سپس اعداد اولیه را پاک می‌کنیم. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم تا تنها یک عدد باقی بماند. آن عدد چند است؟

$C = A \oplus B$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: اگر a_i, b_i, c_i به ترتیب رقم‌های i ام (از سمت راست) A, B و C در مبنای دو باشند، در این صورت $c_i = \begin{cases} 0 & a_i = b_i \\ 1 & a_i \neq b_i \end{cases}$. مثلاً $5 \oplus 7 = (101)_2 \oplus (111)_2 = 2$.

- (الف) ۰ (ب) ۱۲۷ (ج) ۱ (د) ۶۴ (ه) ۶۳

(۲۵) چند عدد ۱۳ رقمی از ارقام $\{1, 2, 3, 4\}$ وجود دارد که مجموع هر سه رقم متوالی در آن زوج باشد؟

- (الف) ۲۱۳ (ب) ۲۱۵ (ج) ۲۱۱ (د) 3×2^{11} (ه) 4×3^{11}

مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۶) ۳۲ لامپ موجود است و هر کدام به یک کلید متصل است. در ابتدا بعضی از لامپ‌ها روشن و بعضی خاموش‌اند. ناگهان یک سیم متصل به یکی از لامپ‌ها اتصال کوتاه می‌کند خراب شده و باعث سوختن فیوز و در نتیجه قطع کل برق می‌شود. فیوز سوخته قابل استفاده‌ی مجدد نیست و باید تعویض شود. اگر کلید لامپی که اتصال دارد در وضعیت روشن قرار داشته باشد و فیوز سالمی را جای‌گزین کنیم فیوز جدید نیز خواهد سوخت. برای پیدا کردن کلید متصل به اتصال کوتاه چند عدد فیوز سالم جدید لازم است؟

الف) ۵ (ب) ۱ (ج) ۶ (د) ۴ (ه) ۳۱

(۲۷) یک چراغ چشمک‌زن با سرعت (a, b) چراغی است که به‌طور متناوب، a ثانیه‌ی متوالی خاموش است و سپس برای b ثانیه‌ی متوالی روشن می‌ماند، و مدام این چرخه را تکرار می‌کند. (a) و b اعداد طبیعی هستند. در مورد یک چراغ چشمک‌زن می‌دانیم:

- (۱) در ثانیه‌ی دهم خاموش بوده است. (۲) در ثانیه‌ی دوازدهم روشن بوده است.
 (۳) در ثانیه‌ی چهاردهم خاموش بوده است. (۴) در ثانیه‌ی شانزدهم روشن بوده است.

با این فرض که نمی‌دانیم چراغ از چه ثانیه‌ای شروع به کار کرده است، چند حالت ممکن (a, b) برای سرعت این چراغ وجود دارد؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

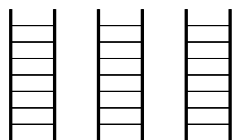
(۲۸) دنباله‌ی $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ را در نظر بگیرید که $a_i \in \{+1, -1, +5, -5\}$ را S_j مجموع j عنصر اول دنباله تعریف می‌کنیم. می‌دانیم که هیچ $1 \leq j \leq n$ وجود ندارد که S_j مضرب ۵ باشد. در هر گزینه یک زوج مرتب (n, S_n) داده شده است. کدام گزینه‌ی زیر امکان‌پذیر است؟

الف) $(67, 333)$ (ب) $(83, 334)$ (ج) $(77, -256)$ (د) $(93, -288)$ (ه) $(105, 519)$

(۲۹) یک جدول 2005×2005 در اختیار داریم که تمام خانه‌های آن سفید هستند. شخصی 1383 بار، یک سطر و یک ستون را انتخاب و رنگ همه‌ی خانه‌های آن سطر و آن ستون را بر عکس می‌کند. توجه کنید که رنگ خانه‌ی مشترک در سطر و ستون تغییر نمی‌کند. تعداد خانه‌های سیاه باقی‌مانده در جدول در انتها، کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۰ (ب) $2,772,915$ (ج) $196,078$ (د) $3,044,854$ (ه) $2,124$

(۳۰) آقای ملکی می‌خواهد از سه نردبان ۷ پله‌ای هواپیما که مانند شکل مقابل در کنار هم قرار دارند بالا برود و در بالاترین سطح قرار بگیرد. او در هر حرکت می‌تواند به یک پله بالاتر در یکی از نردبان‌های مجاور یا نردبانی که اکنون بر روی آن قرار دارد برود، ولی نمی‌تواند در یک حرکت از نردبان اول به نردبان سوم یا برعکس برود. اگر او در ابتدا بر روی اولین پله نردبان سمت راست باشد، به چند طریق می‌تواند خود را به یکی از پله‌های هفتم برساند؟



الف) ۷۰ (ب) ۱۲۸ (ج) ۱۶۹ (د) ۱۸۲ (ه) ۲۳۹

مرحله ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳۱) در ۳۰ کیسه ۳۲ کارت با شماره‌های ۱ تا ۳۲ ریخته‌ایم، به طوری که هیچ کیسه‌ای خالی نیست و نیز اگر کارت i در کیسه‌ی k باشد، کارت $i + 1$ در کیسه‌ای با شماره‌ی کوچک‌تر از k نیست. در ابتدا در کیسه‌ها بسته است و وقتی در یکی را باز می‌کنیم شماره‌ی کارت‌های آن‌را می‌بینیم. دست کم در چند کیسه را باید باز کنیم تا حتماً بتوانیم کارت ۱۳ را ببینیم؟

- الف) ۲ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۱۳ (ه) ۳۲



۳۲) حداقل چند مستطیل 2×3 را باید در صفحه قرار دهیم به طوری که هم پوشانی نداشته باشند و بتوان آن‌ها را با موزائیک‌های به شکل مقابل کاملاً پوشاند؟ بدیهی است که دوران و تقارن مجاز است.

- الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۶ (ه) هرگز نمی‌شود.

۳۳) دنباله‌ی ۵ عضوی $(2, 4, 1, 3, 5)$ را در نظر بگیرید که عضو اول آن ۳ است. هر عمل «وارون» یعنی انتخاب یک i و وارون کردن عضوهای اول تا i ام. مثلاً $(2, 3, 1, 4, 5)$ دنباله را پس از یک وارون نشان می‌دهد. با چندتا عمل وارون می‌توان دنباله‌ی ورودی را از چپ به راست به صورت صعودی مرتب کرد؟ کم‌ترین گزینه‌ی ممکن را انتخاب کنید.

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

۳۴) یک مکعب بزرگ $n \times n \times n$ را در نظر بگیرید. این مکعب را به n^3 مکعب واحد تقسیم کرده‌ایم. دو نفر این بازی را روی مکعب بزرگ انجام می‌دهند: هر نفر در نوبت خود یک مکعب مستطیل $1 \times 1 \times n$ یا $1 \times n \times 1$ یا $n \times 1 \times 1$ از مکعب بزرگ، که هیچ‌یک از مکعب‌های واحد آن رنگ نشده‌اند، را انتخاب کرده و مکعب‌های واحد آن را رنگ می‌کند. در ابتدا هیچ‌یک از مکعب‌های واحد رنگ نشده‌اند. هر کس نتواند در نوبت خود مکعب مستطیلی به شرح فوق انتخاب و رنگ کند بازنده خواهد بود. برای کدام‌یک از حالت‌های $n = 10$ ، $n = 11$ و $n = 12$ و $n = 13$ نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟

- الف) همه‌ی حالات (ب) هیچ یک از حالات (ج) حالات $n = 11$ و $n = 13$ (د) حالت $n = 11$ (ه) حالات $n = 10$ و $n = 12$

۳۵) n نفر دور میزی دایره‌ای شکل نشسته‌اند. هر نفر یا راستگوست یا دروغگو (راستگو همیشه راست و دروغگو همیشه دروغ می‌گوید). هر کدام از این n نفر این جمله را می‌گوید: «بین من و دو نفر سمت راست و دو نفر سمت چپ من، دقیقاً k نفر دروغگو هستند.» کدام‌یک از گزاره‌های زیر در مورد r تعداد حالات دروغگو و راستگو بودن این افراد، درست است؟

- الف) اگر $n = 51$ و $k = 4$ آن‌گاه $r = 4$ (ب) اگر $n = 50$ و $k = 0$ آن‌گاه $r = 0$
 ج) اگر $n = 51$ و $k = 5$ آن‌گاه $r = 1$ (د) اگر $n = 50$ و $k = 1$ آن‌گاه $r = 6$
 ه) اگر $n = 52$ و $k = 1$ آن‌گاه $r = 6$

مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۳۶) دنباله‌ای از اعداد $1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots; 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$ تا x_{83} نام‌گذاری می‌کنیم. دقت کنید که دنباله بعد از '؛' تکرار می‌شود.

$$1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots; 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$$

معادل دودویی عدد $\sum_{i=0}^{83} x_i 2^i$ چند رقم صفر دارد؟

- الف) ۸۳ ب) ۸۲ ج) ۴۲ د) ۴۱ ه) ۴۰

(۳۷) تعدادی کارت داریم که روی هر یک، یک عدد نوشته شده است. دستگاه کارت برگردان دستگاهی است که اگر دو کارت با عددهای a و b به آن بدهیم، آن‌ها را نابود کرده و یک کارت با عدد $2a + 2b$ تولید می‌کند. (یعنی دو کارت را به یک کارت تبدیل می‌کند.) ۷ تا کارت با شماره‌ی ۱ داریم. می‌خواهیم با چند بار استفاده از دستگاه کارت برگردان بیش‌ترین عدد ممکن را تولید کنیم. این عدد چند است؟

- الف) ۲۵۶ ب) ۱۹۰ ج) ۹۴ د) ۸۲ ه) ۵۲

(۳۸) در پارکینگ مشتی ممدعلی سیستم عجیبی برای پارک کردن ماشین‌ها برقرار است. این پارکینگ هفت جای پارک دارد که به ترتیب با شماره‌های صفر تا شش مشخص شده اند. هر ماشینی که به پارکینگ وارد می‌شود ابتدا سراغ جای پارکی می‌رود که شماره‌ی آن برابر باقی مانده‌ی تقسیم شماره‌ی پلاک ماشین بر عدد هفت است. اگر این جای پارک پر بود به سراغ بعدی می‌رود (اگر جای پارک شماره شش پر بود به سراغ شماره صفر می‌رود) و همین‌طور ادامه می‌دهد تا به اولین جای پارک خالی برسد و آن‌جا پارک می‌کند و سپس ماشینی بعدی وارد پارکینگ می‌شود. اگر در انتها ماشین‌ها در پارکینگ به ترتیب ۴۶، ۶۸، ۳۹، ۹۳، ۲۳، ۷۰، ۹۸ ایستاده باشند (پلاک شماره‌ی ۹۸ در جای پارک شماره‌ی صفر و پلاک ۴۶ در پارکینگ شماره‌ی ۶)، چند ترتیب ممکن اولیه برای ورود آن‌ها ممکن است؟

- الف) ۵۰۴۰ ب) ۲۱۰ ج) ۳۰۵ د) ۴۲۰ ه) ۷۲۰

(۳۹) آرش برای فرستادن تقاضای استخدام برای هر یک از ده شرکت مختلف مورد نظرش باید سه توصیه‌نامه از سه استاد مختلف خود (مجموعاً ۳۰ عدد) داشته باشد. چهار نفر از اساتید او به نام‌های دکتر قدسی، دکتر توسرکانی، دکتر جابری‌پور و دکتر اکبری برای او توصیه‌نامه خواهند نوشت. دکتر قدسی ۹ عدد، دکتر توسرکانی ۸ عدد، دکتر جابری‌پور ۷ عدد و دکتر اکبری ۶ عدد. آرش چند راه مختلف برای فرستادن این توصیه‌نامه‌ها دارد؟

- الف) ۱۲,۶۰۰ ب) $(\frac{1}{4})$ ج) ۴۱۰ د) ۳۱۰ ه) ۳,۰۲۴

(۴۰) یک مکعب $1 \times 1 \times 1$ را به 630 مکعب با ابعاد $\frac{1}{7} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ تقسیم می‌کنیم. اگر خطی که قطر اصلی این مکعب است را رسم کنیم، از داخل چند مکعب می‌گذرد؟

- الف) ۸۵ ب) ۸۴ ج) ۲۵ د) ۲۴ ه) ۱۰

موفق باشید!